

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

Table des matières

1	Marché des devises	3
1.1	Conventions	3
1.2	Arbitrage entre marchés étrangers et domestiques	5
1.3	Hedging, self-financing	7
1.4	Quelques formules de valorisation	10

1 Marché des devises

Produits multi-devises : dollar-euro, dollar-yen ...

Plusieurs types de contrat : le sous-jacent est un actif étranger, mais le payoff peut-être en monnaie étrangère (la même ou une autre) ou en monnaie domestique.

1.1 Conventions

- l'indice f se réfère à des variables dans le marché étranger (foreign),
- l'indice d se réfère à des variables dans le marché domestique,
- X_t = le taux de change *foreign-domestic* à la date t = le nombre d'unités monétaires d pour avoir une unité monétaire f .

Ex :

- Change Dollar-Euro $1\$ = X_t\text{€}$.
- Change BTC-USD : $1 \text{ BTC} = X_t\$$

Attention : X_t n'est pas lui-même un actif négociable sur le marché.

Conventions (suite)

▷ 3 monnaies :

- *base currency* : la monnaie dans laquelle nous sommes intéressés [c'est la monnaie f]
- *quote currency* : la monnaie à laquelle on va comparer la *base currency* [c'est la monnaie d]
- *settlement currency* : la monnaie dans laquelle les règlements auront lieu

La convention est de caractériser les contrats en écrivant

Base/Quote.Settlement (par exemple USD/EUR.EUR ou BTC/USDT.ETH)

▷ Classifications des contrats :

- *Linear contracts* : settlement = quote
- *Inverse contracts* : settlement = base
- *Quanto contracts* : settlement $\neq$ base, quote

▷ Cotations des volatilités implicites en Δ .

1.2 Arbitrage entre marchés étrangers et domestiques

Proposition. La valorisation entre marchés étrangers et domestiques d'un flux Ψ_T en T en monnaie f obéit à la règle :

$$X_t C_t^f(\Psi_T, T) = C_t^d(X_T \Psi_T, T).$$

Corollaire. On a la relation d'Interest Rate Parity (IRP) entre prix forward et spot :

$$F_t^d(X_T, T) = X_t \frac{B^f(t, T)}{B^d(t, T)}.$$

Exercice. Dans un marché d'Itô, quelle est la *volatilité spot* du forward sur taux de change ?

Proposition (Drift de X). Supposons que chaque marché est d'Itô et en AOA. Il existe un processus vecteur de volatilité $(\sigma_t^X)_t$ tel que

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f)dt + \sigma_t^X dW_t^d,$$

où $W_t^d = \widehat{W}_t + \int_0^t \lambda_s^d ds$ est le MB sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}^d$ du marché domestique (dont la prime de risque est λ_s^d).

Remarque. Tout se passe (coté modèle stochastique) comme si le taux de change était un actif avec un dividende stochastique.

Proposition (lien entre primes de risque d et f , et MB risque-neutre).

$$\lambda_t^d = \lambda_t^f + (\sigma_t^X)^\top, \quad W_t^d = W_t^f + \int_0^t (\sigma_s^X)^\top ds.$$

1.3 Hedging, self-financing

To simplify, only cash in d and f .

▷ **Novelty : Two money accounts in different currencies and transfer between two accounts**

- π^d : amount in cash in d
- π^f : amount in cash in f

▷ V^d : value of the portfolio in d . By No Arbitrage pricing rules between the two currencies,

$$V_t^d = \pi_t^d + \pi_t^f X_t. \quad (1)$$

▷ Self-financing condition : before rebalancing

$$\begin{cases} \pi_{t+dt-}^d - \pi_t^d = \pi_t^d r_t^d dt, \\ \pi_{t+dt-}^f - \pi_t^f = \pi_t^f r_t^f dt. \end{cases} \quad (2)$$

At the rebalancing time, one can transfer an amount A_{t+dt}^f from the money account f to the money account d :

$$\begin{cases} \pi_{t+dt}^f &= \pi_{t+dt-}^f - A_{t+dt}^f, \\ \pi_{t+dt}^d &= \pi_{t+dt-}^d + A_{t+dt}^f X_{t+dt}. \end{cases} \quad (3)$$

Here we ignore any transfer fees. Just after the rebalancing time, the portfolio value in d evolves as

$$\begin{aligned} V_{t+dt}^d - V_{t+dt-}^d &\stackrel{(1)}{=} (\pi_{t+dt}^d + \pi_{t+dt}^f X_{t+dt}) - (\pi_{t+dt-}^d + \pi_{t+dt-}^f X_{t+dt-}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \left(\pi_{t+dt-}^d + A_{t+dt}^f X_{t+dt} + (\pi_{t+dt-}^f - A_{t+dt}^f) X_{t+dt} \right) \\ &\quad - \left(\pi_{t+dt-}^d + \pi_{t+dt-}^f X_{t+dt-} \right) = 0 \end{aligned}$$

since the exchange rate is assumed to evolve continuously. Self-financing condition is ensured at the global level.

▷ Self-financing condition : final steps.

$$\begin{aligned}
 V_{t+dt}^d - V_t^d &= V_{t+dt-}^d - V_t^d \\
 &\stackrel{(1)}{=} \pi_{t+dt-}^d + \pi_{t+dt-}^f X_{t+dt-} - (\pi_t^d + \pi_t^f X_t) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \pi_t^d + \pi_t^d r_t^d dt + (\pi_t^f + \pi_t^f r_t^f dt)(X_{t+dt} - X_t + X_t) - (\pi_t^d + \pi_t^f X_t)
 \end{aligned}$$

(neglecting second-order infinitesimal terms)

$$\begin{aligned}
 &= \pi_t^d + \pi_t^d r_t^d dt + \pi_t^f (X_{t+dt} - X_t) + (\pi_t^f + \pi_t^f r_t^f dt) X_t - (\pi_t^d + \pi_t^f X_t) \\
 &= \pi_t^d r_t^d dt + \pi_t^f (X_{t+dt} - X_t) + \pi_t^f X_t r_t^f dt.
 \end{aligned}$$

All in all, by eliminating $\pi_t^d = V_t^d - \pi_t^f X_t$, we obtain

$$\begin{aligned}
 dV_t^d &= (V_t^d - \pi_t^f X_t) r_t^d dt + \pi_t^f dX_t + \pi_t^f X_t r_t^f dt \\
 &= V_t^d r_t^d dt + \pi_t^f \left(dX_t - (r_t^d - r_t^f) X_t dt \right).
 \end{aligned}$$

Self-financing condition as if X pays dividend/repo r_t^f .

1.4 Quelques formules de valorisation

Exemple (Call sur actif étranger S^f avec strike en monnaie étrangère).

Payoff : $(S_T^f - K^f)_+$.

Valorisation standard (sans pb de change). *Linear contracts.*

Exemple (Call sur actif étranger S^f avec strike en monnaie domestique).

Payoff : $(X_T S_T^f - K^d)_+$. *Inverse contracts*

Valorisation dans le marché domestique : prix comptant $C_t^d((X_T S_T^f - K^d)_+, T)$

Dynamique RN : $\frac{d(X_t S_t^f)}{X_t S_t^f} = r_t^d dt + (\sigma_t^X + \sigma_t^S) dW_t^d.$

Proposition. Si r_t^d aléatoire mais $\sigma_t^X + \sigma_t^S - \Gamma^d(t, T)$ **déterministe**, formule de Black avec achat de $\mathcal{N}(d_1(\dots))$ actifs domestiques $X_t S_t^f$ (actif étranger payé en monnaie domestique) et vente de $K^d \mathcal{N}(d_0(\dots))$ zéro-coupons domestiques $B^d(t, T)$.

Exemple (Call sur taux de change X).

Payoff : $(X_T - K)_+$.

Se ramène au cas précédent en prenant $S_t^f = B^f(t, T)$ le zéro-coupon étranger d'échéance T car

$$(X_T - K)_+ = (X_T S_T^f - K)_+.$$

Théorème (Formule de Garman-Kolhagen'83 étendu au taux d'intérêt aléatoire). En supposant que le vecteur de volatilité $\sigma_s^X + \Gamma^f(s, T) - \Gamma^d(s, T)$ est déterministe, on a

$$C_t^d((X_T - K)^+, T) = X_t B^f(t, T) \mathcal{N}(d_+(t)) - K B^d(t, T) \mathcal{N}(d_-(t))$$

$$\text{où } d_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T |\sigma_s^X + \Gamma^f(s, T) - \Gamma^d(s, T)|^2 ds}} \log \left(\frac{X_t B^f(t, T)}{K B^d(t, T)} \right) \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T |\sigma_s^X + \Gamma^f(s, T) - \Gamma^d(s, T)|^2 ds}$$

Exercice (Python). Implémenter une stratégie de couverture d'un Call sur taux de change incluant le transfert de cash entre les deux comptes de trading

Exemple (Diff swap forward).

Réf : livre de Musiela, Rutkowski "Martingale methods in financial modelling"

Swap entre Libor 3 mois Yen et Euro payé en Dollar.

Payoff en T_k :

$$\Psi_{\mathbf{T}_k} = \delta(\mathbf{L}^{\text{¥}}(\mathbf{T}_{k-1}, \delta) - \mathbf{L}^{\text{€}}(\mathbf{T}_{k-1}, \delta))\$.$$

Calcul de prix explicite dans le cadre de vol déterministe